Решения задач

8 класс

1. На доске написаны два числа. Одно из них увеличили в 6 раз, а другое уменьшили на 2015, при этом сумма чисел не изменилась. Найдите хотя бы одну пару таких чисел.

Ответ: например, 403 и 0.

Решение. Обозначим искомые числа через x и y. Условие задачи равносильно равенству $6x+(y-2015) = x+y$, отсюда $x = 403$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любая пара чисел вида $(403; y)$, где y — произвольное число.

Критерии. Любая пара чисел, удовлетворяющая условию задачи, плюс проверка того, что она подходит — 7 баллов. Способы получения ответа предъявлять не обязательно.

2. Известно, что $a^2 + b^2 = 3ab$ и $a \neq b$. Вычислите значение выражения

$$\frac{a+b}{a-b}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{5}$.

Решение. Пусть $x = \frac{a+b}{a-b}$, тогда

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab} = \frac{3ab + 2ab}{3ab - 2ab} = 5.$$

Таким образом, $x^2 = 5$, и значит, $x = \pm\sqrt{5}$.

Критерии. Потеря одного из ответов с учетом правильности рассуждения в целом — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Окружность катится снаружи по квадрату, длина стороны которого равна длине окружности. Сколько полных оборотов сделает эта окружность вокруг своего центра к моменту возвращения в исходное положение?

Ответ: 5 оборотов.

Решение. Когда окружность прокатится по одной стороне квадрата, все её точки сделают один полный оборот вокруг центра окружности. При прохождении четырёх сторон получится 4 полных оборота. Кроме того, окружность сделает четверть оборота при вращении около каждой вершины квадрата. Всего получаем $4 + 4 \cdot 0,25 = 5$ оборотов.

Критерии. Рассуждения о том, что окружность за одну сторону делает один оборот, без дальнейшего продвижения — 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

4. Дано число 2015. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31. Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом? (*Киндер М.И.*)

Ответ: 9.

Решение. Предположим, что из 2015 можно получить число $r < 9$. Ясно, что только перестановками цифр получить наименьшее из числа 2015 невозможно. Значит, на некотором шаге из имеющегося числа n придётся вычесть сумму его цифр. Полученное число $n - S(n)$, где $S(n)$ — сумма цифр числа n, по признаку делимости будет делиться на 9; сумма цифр числа $n - S(n)$ будет тоже делиться на 9. Дальнейшие операции перестановки цифр и вычитания суммы цифр, очевидно, не меняют остатка от деления на 9. Поэтому все последующие числа — и наименьшее тоже — будут также делиться на 9. Значит, $r \geq 9$.

Число 9 можно получить, например, так. Из 2015 перестановкой цифр сначала образуем $0152 = 152$, затем из 152 вычтем сумму его цифр: $152 - 8 = 144$. Вычитая четыре раза сумму цифр, равную 9, приходим к числу 108. Переставив цифры, получим $018 = 18$. Еще раз вычитая сумму его цифр, получаем 9.

Критерии. Утверждение, что придется использовать операцию вычитания своей суммы цифр без дальнейшего продвижения — 1 балл. Приведен пример получения 9 без обоснования, что это наименьшее положительное число, — 3 балла. Доказано, что наименьшее число кратно 9, — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Из бумаги вырезан правильный шестиугольник, то есть выпуклый шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Можно ли, складывая его по прямым линиям, получить правильный шестиугольник, у которого площадь в три раза меньше площади исходного шестиугольника? (*Фалилеева М.В.*)

Ответ: можно.

Решение. Пусть площадь исходного шестиугольника $ABCDEF$ равна S. Сложим шестиугольник вдоль прямых AC, CE и EA, как показано на рисунке 1. Поскольку в правильном шестиугольнике все стороны равны и все углы равны, полученный треугольник ACE будет правильным, его площадь — $S/2$. В свою очередь, треугольник ACE состоит из 9 равных правильных треугольничков (рис. 2). Сложим треугольник ACE так, чтобы точки A, C и E переместились в точку O — центр исходного шестиугольника. Образовавшийся шестиугольник $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ — искомый, его площадь равна $\frac{2}{3}S_{ACE} = \frac{1}{3}S$.

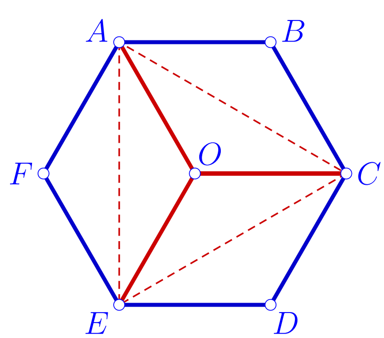

Рис. 1

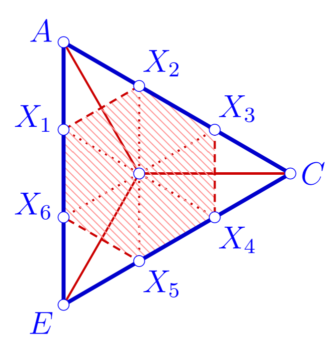

Рис. 2

Решения задач

9 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число, для которого 20% и 75% от него являются целыми числами.

Ответ: 20.

Решение. Пусть n — искомое число. Так как $0,2n = \frac{1}{5}n$ и $0,75n = \frac{3}{4}n$ — целые числа, то n делится на 5 и на 4, и значит, делится на 20. Очевидно, что любое натуральное число, кратное 20, удовлетворяет условию. Наименьшее среди них — 20.

Критерии. Только правильный ответ с проверкой — 1 балл. Доказано, что число делится на 20, но не упомянуто, что 20 подходит — 6 баллов.

2. Сумма 65 чисел равна 2015. Когда самое большое из них увеличили в три раза, а другое уменьшили на 62, сумма всех чисел не изменилась. Найдите наименьшее среди исходных чисел.

Ответ: 31.

Решение. Пусть x — наибольшее, а y — число, которое уменьшили на 62. Так как сумма всех чисел не изменилась, то $3x + (y - 62) = x + y$, откуда $x = 31$. Но тогда все 65 чисел исходного набора равны. Если это не так, хотя бы одно из них меньше x, и значит, сумма всех чисел набора меньше $65x$, то есть $2015 < 65x$, или $31 < x$, противоречие. Итак, все числа совпадают и равны 31. Значит, наименьшее число тоже равно 31.

Критерии. Доказательство того, что наибольшее число равно 31 без дальнейших продвижений — 2 балла.

3. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами удовлетворяет неравенству $f(x) \geq 0,2$ при всех x. Докажите, что $f(x) \geq 0,75$ при любом x.

(*По мотивам задачи Берлова С.*)

Первое решение. По условию квадратный трёхчлен $x^2+ax+b-0,2$ принимает неотрицательные значения на всей числовой оси, поэтому его дискриминант неположителен, то есть

$$a^2 - 4(b - 0,2) \leq 0, \qquad \text{или} \qquad a^2 - 4b \leq -0,8\,.$$

Отсюда следует, что целое число $m = a^2 - 4b$ не больше -1. Кроме того, m не может равняться ни -1, ни -2, и значит, $m \leq -3$. Действительно, квадрат целого числа a^2 при делении на 4 всегда даёт в остатке 0 или 1, поэтому остатки при делении m на 4 могут быть только 0 или 1. Следовательно, $a^2 - 4b \leq -3$. Последнее равносильно утверждению о том, что квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b - 0,75$ имеет неположительный дискриминант, и значит, принимает только неотрицательные значения; отсюда $f(x) \geq 0,75$.

Второе решение. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с положительным старшим коэффициентом принимает наименьшее значение при $x = -a/2$. По условию это наименьшее значение $f(-\frac{a}{2}) = \frac{4b-a^2}{4}$ не меньше $0,2$, и значит,

$$4b - a^2 \geq 0,8.$$

Так как a и b — целые числа, то целое число $4b-a^2$ не меньше 1. Как и в первом решении, число $4b-a^2$ не может равняться ни 1, ни 2. Таким образом, $4b-a^2 \geq 3$, следовательно, $f(-a/2) \geq 0,75$. Итак, наименьшее значение квадратного трёхчлена $f(x)$ не меньше $0,75$, значит, $f(x) \geq 0,75$ при всех x.

Замечание. Квадратный трёхчлен x^2+x+1 удовлетворяет условию задачи; его наименьшее значение равно 0,75, так что доказанная оценка является точной.

Критерии. Из условия получено неравенство вида $4b-a^2 \geq 0,8$ или аналогичное ему — 1 балл.

4. Выпуклый многоугольник, у которого n^2 сторон $(n>2)$, разрезали на n пятиугольников. Докажите, что $n=3$.

Решение. Сумма внутренних углов m-угольника равна $(m-2)\cdot 180°$. Сумма внутренних углов всех n пятиугольников больше суммы углов исходного многоугольника с n^2 сторонами, поэтому

$$n \cdot 3 \cdot 180° > (n^2-2)\cdot 180°.$$

Отсюда следует, что $3n > n^2-2$, то есть $2 > n(n-3)$, и значит, $n=3$.

Критерии. Рассмотрение только частного случая с девятиугольником или нескольких конкретных многоугольников, которые не удаётся разрезать — 0 баллов. После завершения доказательства, что $n \leq 3$, предъявлять пример разрезания девятиугольника необязательно. (Из условия следует, что многоугольник, удовлетворяющий условию задачи, существует.) Наличие или отсутствие этого примера никак не оценивается и не штрафуется. Получено неравенство $2 > n(n-3)$ или аналогичное — 7 баллов.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 его углов пересекают окружность в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что сумма длин биссектрис больше периметра четырёхугольника $ABCD$. (*Утяганов С.Э.*)

Решение. Лемма. *Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке A_1. Длина отрезка AA_1 больше полусуммы длин сторон треугольника, между которыми она заключена.*

Доказательство. Так как углы BAA_1 и CAA_1 равны, то равны и соответствующие им дуги описанной окружности; из равенства этих дуг следует равенство хорд A_1B и A_1C. Теперь воспользуемся теоремой косинусов для треугольников BAA_1 и CAA_1:

$$A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2 - 2\cdot AB\cdot AA_1 \cos\alpha,$$
$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2 - 2\cdot AC\cdot AA_1 \cos\alpha,$$

где $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \alpha$. Из равенства левых частей получаем

$$AB^2 + AA_1^2 - 2\cdot AB\cdot AA_1 \cos\alpha = AC^2 + AA_1^2 - 2\cdot AC\cdot AA_1 \cos\alpha.$$

Отсюда

$$AA_1 = \frac{AB+AC}{2\cos\alpha} > \frac{AB+AC}{2}.$$

Замечание. Используя теорему Птолемея, можно дать другое доказательство леммы. Для сторон и диагоналей вписанного четырёхугольника ABA_1C выполняется соотношение $AB\cdot A_1C + AC\cdot A_1B =$

$AA_1 \cdot BC$, из которого легко выражается отрезок AA_1. Так как $A_1C = A_1B$, то

$$AA_1 = \frac{(AB + AC) \cdot A_1B}{BC}.$$

Осталось воспользоваться очевидным неравенством $A_1B + A_1B > BC$, из которого следует $A_1B > \frac{1}{2}BC$.

Применим лемму к каждому из четырёх отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, тогда

$$AA_1 > \tfrac{1}{2}(AD + AB), \qquad BB_1 > \tfrac{1}{2}(AB + BC),$$
$$CC_1 > \tfrac{1}{2}(BC + CD), \qquad DD_1 > \tfrac{1}{2}(CD + AD).$$

Складывая эти неравенства, получаем требуемое утверждение.

Замечание. Аналогичным образом утверждение можно доказать для любого вписанного в окружность многоугольника.

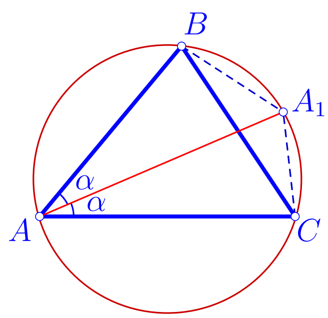

Рис. 3

Критерии. При решении можно использовать теорему Птолемея. Доказательство леммы без дальнейшего продвижения — 3 балла.

Решения задач

10 класс

1. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

Ответ: 1.

Решение. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_{2015}$ — длины отрезков первого разбиения и $l'_1, l'_2, \ldots, l'_{2016}$ — длины отрезков второго разбиения. Сумма длин полуокружностей в первом и во втором случаях равна

$$S_1 = \frac{\pi}{2}(l_1 + l_2 + \ldots + l_{2015}) = \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$
$$S_2 = \frac{\pi}{2}(l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{2016}) = \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$

и значит, $S_1 : S_2 = 1$.

2. Найдите все функции f, удовлетворяющие при всех x уравнению

$$4 \cdot f(x) + f(2015 - x) = x.$$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{3}(x - 403)$.

Решение. Исходное равенство можно рассматривать как уравнение относительно двух неизвестных $A = f(x)$ и $B = f(2015 - x)$. Поскольку оно верно при всех значениях x, заменим в нём x на $2015 - x$. Получим $4 \cdot f(2015 - x) + f(x) = 2015 - x$. Вместе с исходным, получаем систему

$$\begin{cases} 4A + B = x \\ A + 4B = 2015 - x. \end{cases}$$

Исключая из этих равенств B, получим $A = f(x) = \frac{1}{3}(x - 403)$.

3. Найдите все действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2015} такие, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} = 2015 \quad \text{и} \quad |a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{2015} - a_1|.$$

Ответ: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2015} = 1$.

Решение. Пусть $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{2015} - a_1| = k$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= \pm k, \\ a_2 - a_3 &= \pm k, \\ &\ldots \\ a_{2014} - a_{2015} &= \pm k, \\ a_{2015} - a_1 &= \pm k. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, слева получим 0, а справа сумму 2015 слагаемых

$$\pm k \pm k \pm \ldots \pm k = k \cdot (\pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1).$$

Сумма 2015 слагаемых ± 1 нечётная, отсюда следует, что $k = 0$. Значит, все числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2015} равны. Поскольку $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} = 2015$, получаем единственный набор $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2015} = 1$.

Критерии. Получено, что сумма всех чисел равна $k \cdot (\pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1)$ без дальнейшего продвижения — 3 балла.

4. Рассмотрим $2n+1$ действительных чисел в промежутке $(1;\, 2^n)$. Докажите, что из них можно выбрать три числа, которые будут длинами сторон некоторого треугольника.

Решение. Разобьём интервал $(1; 2^n)$ на n различных интервалов

$$(1;\, 2),\ [2;\, 2^2),\ [2^2;\, 2^3)\, , \ldots,\ [2^{n-1};\, 2^n).$$

По *принципу Дирихле* найдётся интервал $[2^k;\, 2^{k+1})$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, содержащий три числа из данного набора, скажем, a, b, c. Поскольку

$$a + b \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1} > c,$$
$$b + c \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1} > a,$$
$$c + a \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1} > b,$$

числа a, b, c — искомые.

5. Внутри угла 60° с вершиной A проведён луч AB. В каждый из образовавшихся острых углов вписана окружность, причём обе они касаются луча AB в точке B. Найдите длину отрезка AB, если радиусы окружностей равны 1 и 3.

Ответ: $2\sqrt{3} + \sqrt{15}$.

Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окружностей соответственно, K_1 и K_2 — точки их касания со сторонами угла, $AK_1 = AK_2 = AB = x$.

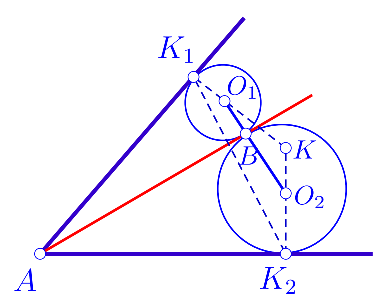

Рис. 4

Первое решение. Продолжим прямые K_1O_1 и K_2O_2 до пересечения в точке K. Прямоугольные треугольники AK_1K и AK_2K равны: у них общая гипотенуза AK, а катеты AK_1 и AK_2 равны общей касательной AB. Значит, $\angle K_1AK = \angle K_2AK = 30^\circ$, $K_1K = K_2K = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$. По условию $\angle K_1AK_2 = 60^\circ$, поэтому треугольник K_1AK_2 — равносторонний и $K_1K_2 = x$.

В треугольнике KO_1O_2 известны его стороны:

$$KO_1 = KK_1 - K_1O_1 = x \operatorname{tg} 30^\circ - 1,$$
$$KO_2 = KK_2 - K_2O_2 = x \operatorname{tg} 30^\circ - 3,$$

$O_1O_2 = 1 + 3$ и $\angle O_1KO_2 = 120^\circ$. Воспользуемся теоремой косинусов в этом треугольнике:

$$O_1O_2{}^2 = KO_1{}^2 + KO_1{}^2 - 2 \cdot KO_1 \cdot KO_2 \cdot \cos 120^\circ.$$

Подставляя указанные величины и решая полученное квадратное уравнение относительно x, находим $x = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$.

Второе решение. Отметим, что AO_1 и AO_2 — биссектрисы углов K_1AB и K_2AB соответственно. Так как $\angle K_1AK_2 = 60^\circ$, то $\angle O_1AB + \angle O_2AB = 30^\circ$. Тогда

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{tg}\angle O_1AB + \operatorname{tg}\angle O_2AB}{1 - \operatorname{tg}\angle O_1AB \cdot \operatorname{tg}\angle O_2AB}\,.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\angle O_1AB = \frac{O_1B}{AB} = \frac{1}{x}$ и $\operatorname{tg}\angle O_2AB = \frac{O_2B}{AB} = \frac{3}{x}$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4x}{x^2 - 3}\,.$$

Отсюда находим положительный корень $x = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$.

Решения задач

11 класс

1. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

Ответ: 1.

Решение. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_{2015}$ — длины отрезков первого разбиения и $l'_1, l'_2, \ldots, l'_{2016}$ — длины отрезков второго разбиения. Сумма длин полуокружностей в первом и во втором случаях равна

$$S_1 = \frac{\pi}{2}\left(l_1 + l_2 + \ldots + l_{2015}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$
$$S_2 = \frac{\pi}{2}\left(l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{2016}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$

и значит, $S_1 : S_2 = 1$.

2. Найдите наименьшее (не обязательно целое) положительное число, для которого 35% и 77% от него являются целыми числами. (*Утяганов С.Э.*)

Ответ: $\frac{100}{7}$.

Решение. Пусть x — искомое число и $0,35x = n$, $0,77x = m$. Отсюда $x = \frac{100}{35}n = \frac{100}{77}m$. Из последнего равенства находим $11n = 5m$. Числа n и m — натуральные, поэтому n делится на 5, а m — на 11. Значит, $n \geq 5$, и поэтому $x = \frac{100}{35}n \geq \frac{100}{7}$ (оценка).

Легко проверяется, что число $x = \frac{100}{7}$ удовлетворяет условию задачи.

Критерии. Только пример — 1 балл. Оценка без примера — 3 балла.

3. Функция f непрерывна на всей числовой оси. Известно, что уравнение $f(x + f(y + f(z))) = x + y + z$ имеет хотя бы одно решение. Докажите что уравнение $f(x) = x$ также имеет решение. (*Киндер М.И.*)

Решение. Предположим, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Значит, график непрерывной функции $g(x) = f(x) - x$ целиком расположен либо в верхней, либо в нижней полуплоскости, то есть для всех x выполняется одно из двух неравенств: $f(x) > x$ или $f(x) < x$. В обоих случаях получаем противоречие. Например, если $f(x) > x$, то для всех x, y и z имеем

$$f(x + f(y + f(z))) > x + f(y + f(z)) > x + y + f(z) > x + y + z,$$

и значит, уравнение $f(x + f(y + f(z))) = x + y + z$ не имеет корней, что противоречит условию. Во втором случае рассуждения аналогичные.

4. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq 3(ab + bc + ca).$$

(*Киндер М.И.*)

Решение. Умножим неравенство на 2 и преобразуем числители каждой дроби в левой части, используя тождество $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$. Тогда для первой дроби имеем

$$\frac{4ab}{a+b} = (a+b) - \frac{(a-b)^2}{a+b} \leq (a+b) - \frac{(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Поскольку $a+b+c=1$, первая дробь не превосходит $(a+b)-(a-b)^2$. Аналогичные неравенства запишем для двух других дробей, входящих в левую часть неравенства:

$$\frac{4bc}{b+c} \leq (b+c) - (b-c)^2,$$
$$\frac{4ca}{c+a} \leq (c+a) - (c-a)^2.$$

Теперь сложим полученные три неравенства и учтём, что $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca)$. Снова используем равенство $a+b+c=1$, и после очевидных преобразований получим неравенство

$$\frac{4ab}{a+b} + \frac{4bc}{b+c} + \frac{4ca}{c+a} \leq 6(ab+bc+ca),$$

равносильное исходному, что и требовалось.

5. У выпуклого многоугольника 500 сторон, его периметр равен 700. Докажите, что какие-то три его вершины образуют треугольник, площадь которого меньше 1.

(*Киндер М.И.*)

Решение. Пусть A_1, A_2, …, A_{500} — вершины исходного многоугольника. Докажем, что среди всех треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, …, $A_{499}A_{500}A_1$, $A_{500}A_1A_2$, образованных тремя последовательными вершинами многоугольника, обязательно найдется треугольник площади меньше 1. Предположим противное, и площади всех этих треугольников не меньше 1. Заметим, что для площади произвольного треугольника ABC справедливо неравенство

$$2 \cdot S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC \leq AB \cdot BC,$$

из которого, в частности, следует $2 \leq 2 \cdot S_{A_1A_2A_3} \leq A_1A_2 \cdot A_2A_3$. Используя неравенство о среднем арифметическом и геометрическом, получим:

$$A_1A_2 + A_2A_3 \geq 2\sqrt{A_1A_2 \cdot A_2A_3} \geq 2\sqrt{2}.$$

Аналогичные неравенства запишем для каждой пары последовательных сторон:

$$A_2A_3 + A_3A_4 \geq 2\sqrt{2},$$
$$\ldots$$
$$A_{499}A_{500} + A_{500}A_1 \geq 2\sqrt{2},$$
$$A_{500}A_1 + A_1A_2 \geq 2\sqrt{2}.$$

Просуммируем все эти 500 неравенств, тогда в левой части получим удвоенное значение периметра многоугольника, то есть число $2 \cdot 700$. Поэтому $2 \cdot 700 \geq 2\sqrt{2} \cdot 500$, или $1,4 \geq \sqrt{2}$. Это даёт $1,4^2 \geq 2$, противоречие. Таким образом, по крайней мере, у одного из треугольников площадь меньше 1.